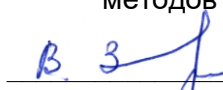


МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО ВГУ)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
алгебры и математических
методов гидродинамики

 (Звягин В.Г.)
подпись, расшифровка подписи
18.03.2025 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.О.10 Линейная алгебра

1. Шифр и наименование направления подготовки:

01.05.01 Фундаментальные математика и механика

2. Профиль подготовки: Современные методы теории функций в математике и механике

3. Квалификация выпускника: Математик. Механик. Преподаватель

4. Форма образования: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра алгебры и математических методов гидродинамики

6. Составители программы: доцент, к.ф.-м.н. Адамова Римма Сергеевна

7. Рекомендована: НМС математического факультета протокол № 0500-03 от 18.03.2025 г.

8. Учебный год: 2025-2026

Семестр(-ы): 2

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целью курса является освоение основных понятий и фактов линейной алгебры, овладение основными методами решения задач.

Задачами обучения являются: ознакомление с основными алгебраическими понятиями и фактами, овладение основными методами решения задач, выработка навыков и умений по применению полученных знаний при решении задач линейной алгебры и других математических дисциплин.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Линейная алгебра» относится к Блоку 1 Обязательной части, т.е. является обязательной дисциплиной для изучения обучающимися.

Для его успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения по предшествующим дисциплинам: алгебра.

Студент должен свободно владеть элементами алгебры.

11. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики	ОПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	Знать: концептуальные основы методов решения задач в предметной области; основные методы доказательства математических утверждений Уметь: формулировать постановки основных задач алгебры, в том числе в проективных пространствах, формулировать и доказывать теоремы существования, единственности, корректной постановки задач алгебры. Владеть: теоретическими подходами к решению задач алгебры; навыками работы в информационных современных системах
		ОПК-1.2	Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности	Знать: зарубежную и отечественную литературу в области алгебры, общие формы закономерности теории алгебры Уметь: использовать методы, способы решения задач в предметной области Владеть: источниками информации, навыками работы с литературой, информационными системами
		ОПК-1.3	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Знать: методы решения задач в области алгебры Уметь: выбирать концептуальные методы решения алгебраических задач Владеть: методами самостоятельного обучения новым знаниям и способами их применения в области алгебры

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом — 8/ 288.

Форма промежуточной аттестации: зачёт, экзамен

13. Виды учебной работы:

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)	
	Всего	По семестрам
		2
Аудиторные занятия	118	118
в том числе: лекции	68	68
практические	50	50
лабораторные		
Самостоятельная работа	134	134
Контроль	36	36
Итого:	288	288

13.1 Содержание разделов дисциплины:

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1	Векторные пространства	Векторные пространства. Линейная зависимость систем векторов. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора в заданном базисе. Изоморфизм векторных пространств. Изоморфность конечномерных пространств одинаковой размерности. Матрица перехода от одного базиса к другому. Преобразование координат векторов при изменении базиса. Подпространство векторного пространства. Линейная оболочка и ранг системы векторов. Пересечение и сумма подпространств, прямая сумма подпространств.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=978 <u>1</u>
2	Линейные отображения	Линейные отображения векторных пространств. Матрица линейного отображения. Изменение матрицы линейного отображения при переходе к другим базисам. Действия с линейными отображениями. Пространство линейных отображений. Ядро и образ линейного отображения, их размерности. Линейные операторы. Обратный оператор, условие существования обратного оператора. Собственные векторы и собственные значения. Характеристический многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли. Инвариантные подпространства. Критерий диагонализруемости матрицы линейного оператора.	
3	Жорданова форма оператора	Жорданова клетка. Жорданова матрица. Корневые подпространства. Разложение пространства в прямую сумму циклических корневых подпространств. Теорема о жордановой нормальной форме матрицы линейного оператора в комплексном и в вещественном пространстве. Единственность жордановой нормальной формы.	
4	Билинейные и квадратичные формы	Билинейные формы. Матрица билинейной формы. Симметрические и кососимметрические билинейные формы. Квадратичные формы. Методы Лагранжа и Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции. Положительно определенные формы. Критерий Сильвестра. Приведение пары квадратичных форм к каноническому виду. Билинейные и квадратичные формы на комплексном пространстве.	
5	Евклидовы и унитарные пространства	Евклидовы и унитарные векторные пространства. Длина вектора, угол между векторами. Неравенство Коши-Буняковского. Ортонормированные базисы. Процесс	

		ортогонализации Грама-Шмидта. Определитель Грама. Ортогональное дополнение. Проекция вектора на подпространство. Изоморфизм евклидовых и унитарных пространств. Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Сопряженный базис. Линейный оператор, сопряженный к данному. Симметрические и эрмитовы линейные операторы, их спектр. Существование собственного ортонормированного базиса. Ортогональные и унитарные линейные операторы, канонический базис для них. Разложение невырожденного линейного оператора в произведение положительного и изометрического оператора. Приведение квадратичной (эрмитовой) формы к главным осям.	
2. Практические занятия			
1	Векторные пространства	Векторные пространства. Линейная зависимость систем векторов. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора в заданном базисе. Изоморфизм векторных пространств. Изоморфность конечномерных пространств одинаковой размерности. Матрица перехода от одного базиса к другому. Преобразование координат векторов при изменении базиса. Подпространство векторного пространства. Линейная оболочка и ранг системы векторов. Пересечение и сумма подпространств, прямая сумма подпространств.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9781
2	Линейные отображения	Линейные отображения векторных пространств. Матрица линейного отображения. Изменение матрицы линейного отображения при переходе к другим базисам. Действия с линейными отображениями. Пространство линейных отображений. Ядро и образ линейного отображения, их размерности. Линейные операторы. Обратный оператор, условие существования обратного оператора. Собственные векторы и собственные значения. Характеристический многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли. Инвариантные подпространства. Критерий диагонализруемости матрицы линейного оператора.	
3	Жорданова форма оператора	Жорданова клетка. Жорданова матрица. Корневые подпространства. Разложение пространства в прямую сумму циклических корневых подпространств. Теорема о жордановой нормальной форме матрицы линейного оператора в комплексном и в вещественном пространстве. Единственность жордановой нормальной формы.	
4	Билинейные и квадратичные формы	Билинейные формы. Матрица билинейной формы. Симметрические и кососимметрические билинейные формы. Квадратичные формы. Методы Лагранжа и Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции. Положительно определенные формы. Критерий Сильвестра. Приведение пары квадратичных форм к каноническому виду. Билинейные и квадратичные формы на комплексном пространстве.	
5	Евклидовы и унитарные пространства	Евклидовы и унитарные векторные пространства. Длина вектора, угол между векторами. Неравенство Коши-Буняковского. Ортонормированные базисы. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Определитель Грама. Ортогональное дополнение. Проекция вектора на подпространство. Изоморфизм евклидовых и унитарных пространств. Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Сопряженный базис. Линейный оператор, сопряженный к данному. Симметрические и эрмитовы линейные операторы, их спектр. Существование собственного ортонормированного базиса. Ортогональные и унитарные линейные операторы, канонический базис	

		для них. Разложение невырожденного линейного оператора в произведение положительного и изометрического оператора. Приведение квадратичной (эрмитовой) формы к главным осям.	
--	--	---	--

13.2 Разделы дисциплины и виды занятий:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Векторные пространства.	14	10		27	51
2	Линейные отображения.	14	10		27	51
3	Жорданова форма оператора.	12	10		27	49
4	Билинейные и квадратичные формы.	14	10		27	51
5	Евклидовы и унитарные пространства.	14	10		26	50
	Экзамен					36
	Итого:	68	50		134	216

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся, на которую отведено 134 часа. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях. Самостоятельная работа обучающихся направлена на самостоятельное освоение всех тем и вопросов учебной дисциплины, предусмотренных программой. Самостоятельная работа является обязательным видом деятельности для каждого обучающегося, ее объем по учебному курсу определяется учебным планом. При самостоятельной работе обучающийся взаимодействует с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя.

Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и ресурсами сети Internet, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся заинтересованное отношение к конкретной проблеме. Вопросы, которые вызывают у обучающихся затруднения при подготовке, должны быть заранее сформулированы и озвучены во время занятий в аудитории для дополнительного разъяснения преподавателем.

Для успешного и плодотворного обеспечения итогов самостоятельной работы разработаны учебно-методические указания к самостоятельной работе студентов над различными разделами дисциплины.

Все задания, выполняемые студентами самостоятельно, подлежат последующей проверке преподавателем.

При изучении курса «Линейная алгебра» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров,

заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

4. Кроме обычного курса в системе «Электронный университет», все необходимые для усвоения курса материалы размещены также на сайте факультета https://math.vsu.ru/wp/?page_id=937.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Кострикин А.И. Введение в алгебру : учеб. для вузов : в 3 ч./ А.И.Кострикин.-М.: Физматлит, 2009.-Ч.1. Основы алгебры. – 271 с.
2	Кострикин А.И. Введение в алгебру : учеб. для вузов : в 3 ч./ А.И.Кострикин.-М.: Физматлит, 2009.-Ч.2. Линейная алгебра. – 367 с.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	Курош А.Г. Курс высшей алгебры: учеб. для студентов вузов, обуч. по специальностям "Математика", "Прикладная математика"/ А.Г.Курош.-СПб.: Лань, 2004. – 431 с.
4	Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре: учеб. пособие для вузов/ Д.К.Фаддеев.-СПб.:Лань,2004. – 415 с.
5	Кострикин А.И. Введение в алгебру : учеб. для вузов : в 3 ч./ А.И.Кострикин.-М.: Физматлит, 2000.-Ч.3. Основные структуры алгебры. – 272 с.
6	Боревич З. И. Определители и матрицы : учебное пособие / З.И. Боревич .— Изд. 4-е, стер. — СПб. [и др.] : Лань, 2004 .— 183, [1] с.
7	Беклемишева Л.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учеб. пособие для студентов вузов/ Л.А.Беклемишева, А.Ю.Петровчи, Н.А.Чубаров.-М.: Наука, 1987.- 494 с.
8	Проскураков И.В. Сборник задач по линейной алгебре: учеб. пособие для студентов физико-мат. специальностей вузов / И.В.Проскураков.-М.: Лаб. базовых знаний, 2002. – 382 с.
9	Ильин В. А. Линейная алгебра : учебник для студ. физ. специальностей и специальности "Прикладная математика" / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк .— Изд. 6-е, стер. — М. : Физматлит, 2004.— 278 с.
10	Федорчук В. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : Учебное пособие для студ. мех.-мат. специальностей ун-тов / В. В. Федорчук .— 2-е изд., испр. — М. : Изд-во НЦ ЭНАС, 2001 .— 327, [1] с.
11	Постников М. М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия : Учебное пособие для студ. вузов, обуч.по специальности "Математика" / М.М. Постников .— М. : "Наука" Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1979 .— 311,[1]с.
12	Постников М. М.Линейная алгебра : Учебное пособие для студ. вузов, обуч.по специальности "Математика" / М.М. Постников .— М. : "Наука" Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1986 .— 400 с.
13	Шилов Г. Е.Математический анализ : Конечномерные линейные пространства: Учеб. пособие для студ.ун-тов .— М. : Наука: Физматлит, 1969 .— 432 с.
14	Головина Л. И.Линейная алгебра и некоторые ее приложения : учебное пособие для студ. втузов / Л.И. Головина .— М. : Наука, 1985 .— 392 с.
15	Ефимов Н. В.Линейная алгебра и многомерная геометрия / Н. В. Ефимов, Э. Р. Розендорн .— 3-е изд., стер. — М. : Физматлит, 2004 .— 463, [1] с.
16	Халмош П.. Конечномерные векторные пространства / П. Халмош ; пер. с англ. Д.Ф. Борисова, Д.А. Райкова .— М. : Физматлит, 1963 .— 262, [1] с.
17	Сборник задач по алгебре / В.А. Артамонов, Ю.А. Бахтурин, Э.Б. Винбер ; под ред. А.И. Кострикина .— 3-е изд., испр. и доп. — М. : Физматлит, 2001 .— 463 с.
18	Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре : учебное пособие / Х.Д. Икрамов ; под ред. В.В. Воеводина .— Изд. 2-е, испр. — СПб ; М. ; Краснодар : Лань, 2006 .— 319 с.

19	Алгебра и теория чисел: метод. указания для студ. 1 курса мат. фак./ сост. Н.М.Близняков, В.Ф.Субботин.-Воронеж : ВГУ, 1990.-Ч.I.- 22 с.
20	Алгебра и теория чисел: метод. указания для студ. 1 курса мат. фак./ сост. Н.М.Близняков, В.Ф.Субботин.-Воронеж : ВГУ, 1990.-Ч.II.- 22 с.
21	Алгебра и теория чисел: метод. указания для студ. 1 курса мат. фак./ сост. Н.М.Близняков, В.Ф.Субботин.-Воронеж : ВГУ, 1990.-Ч.III.- 15 с.
22	Алгебра и теория чисел: метод. указания для студ. 1 курса мат. фак./ сост. Н.М.Близняков, В.Ф.Субботин.-Воронеж : ВГУ, 1990.-Ч.IV.- 23 с.
23	Алгебра и теория чисел: метод. указания для студ. 1 курса мат. фак./ сост. Н.М.Близняков, В.Ф.Субботин.-Воронеж : ВГУ, 1990.-Ч.V.- 20 с.
24	Алгебра и теория чисел: метод. указания для студ. 1 курса мат. фак./ сост. Н.М.Близняков В.Ф.Субботин.-Воронеж : ВГУ, 1990.-Ч.VI.- 15 с.
25	Комплексные числа: метод. указания для студентов 1 курса мат. фак./ сост. Н.М.Близняков. – Воронеж: ВГУ, 1995.- 20 с.
26	Элементы теории множеств : учебно-методическое пособие для вузов / Воронеж. гос. ун-т; сост. Н.М. Близняков .— Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2008 .— 46 с.
27	Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре: учеб. пособие для студентов физико-мат. специальностей вузов / И.В.Проскуряков.-М.: Лаб. базовых знаний, 2002. – 382 с.
28	Фаддеев Д.К. Задачи по высшей алгебре: учеб. пособие для студентов вузов, обуч. по мат. специальностям/ Д.К.Фаддеев, И.С.Соминский.-СПб.: Лань, 2004.-287 с.

в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

№ п/п	Источник
29	http://www.lib.vsu.ru/?p=4 - Электронный каталог ЗНБ ВГУ
30	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9781 - Электронный курс
31	https://math.vsu.ru/wp/?page_id=937 – Сайт факультета

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Кострикин А.И. Введение в алгебру : учеб. для вузов : в 3 ч./ А.И.Кострикин.-М.: Физматлит, 2009.-Ч.1. Основы алгебры. – 271 с.
2	Кострикин А.И. Введение в алгебру : учеб. для вузов : в 3 ч./ А.И.Кострикин.-М.: Физматлит, 2009.-Ч.2. Линейная алгебра. – 367 с.
3	Курош А.Г. Курс высшей алгебры: учеб. для студентов вузов, обуч. по специальностям “Математика”, “Прикладная математика”/ А.Г.Курош.-СПб.: Лань, 2007. – 560 с. https://lanbook.lib.vsu.ru/books/element.php?pl1_id=527
4	Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре: учеб. пособие для вузов/ Д.К.Фаддеев.-СПб.:Лань, 2007.– 416 с. https://lanbook.lib.vsu.ru/books/element.php?pl1_id=397
5	Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете

17. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (<https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9781>).

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linux, Microsoft, Windows Office, LibreOffice 5, *Calc*, *Math*, браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Специализированная мебель.

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

19. Фонд оценочных средств:

Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Векторные пространства	ОПК-1	ОПК-1.2, ОПК-1.3	Домашние задания, контрольная работа
2	Линейные отображения	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Домашние задания, контрольная работа
3	Жорданова форма оператора	ОПК-1	ОПК-1.1	Домашние задания, контрольная работа
4	Билинейные и квадратичные формы	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Домашние задания, контрольная работа
5	Евклидовы и унитарные пространства	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Домашние задания, контрольная работа
Промежуточная аттестация Форма контроля – зачёт				Зачёт выставляется при успешной сдаче контрольных работ Перечень вопросов к экзамену
Промежуточная аттестация Форма контроля - экзамен				

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Домашние задания:

По теме 1 Векторные пространства

Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. учеб. пособие / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский; - М., 1977. – 288 с.

Задания №№ 642,643,644,647,649,674,676,680,681, 1279, 1280, 1281, 1284, 1287, 1290-1293, 1297, 1301, 1302, 1310-1313, 1317, 1320-1322, 1324, 1328

По теме 2 Линейные отображения

Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. учеб. пособие / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский; - М., 1977. – 288 с.

Задания №№ 1434-1446, 1448, 1449, 1450,1452,1453,1454,1457,1458, 1489, 1490, 1465-1474, 1479-1483,1496, 1497,1499

По теме 3 Жорданова форма оператора

Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре : учеб. пособие / И.В.

Проскуряков;– Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 475 с.

Задания №№ 1090 -1104

По теме 4 Билинейные и квадратичные формы

Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре : учеб. пособие / И.В.

Проскуряков;– Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 475 с.

Задания №№ 1361-1363,1357-1360,1370-1372,1402,1403

По теме 5 Евклидовы и унитарные пространства

Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре : учеб. пособие / И.В.

Проскуряков;– Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 475 с.

Задания №№1366, 1367, 1402, 1403

Перечень вопросов к зачету: оценка знаний при проведении зачета ведется с учетом результата работы в ходе семестра, результатом выполнения контрольных работ.

Примерный перечень задач для контрольной работы №1:

1. В пространстве $M_2(\mathbb{R})$ квадратных матриц 2×2 действуют линейные операторы Φ и Ψ , определяемые по следующим правилам: $\Phi X = X^T$, $\Psi X = AX$, где $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — фиксированная матрица. Найти суперпозиции операторов $\Phi\Psi$ и $\Psi\Phi$.
2. В пространстве $\mathbb{R}^3$ действует линейный оператор φ , определенный равенством $\varphi(x) = (x, a)a$, где через $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение векторов, вектор $a = (1, 1, 1)$. Найти ядро и образ оператора φ .
3. Доказать, что линейное подпространство, натянутое на любую систему собственных векторов преобразования φ , инвариантно относительно φ .
4. Можно ли привести матрицу линейного преобразования к диагональному виду путем перехода к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему матрицу.

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Найти жорданову форму матрицы:

$$\begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}.$$

1. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на данную систему векторов: $(1, 2, 2, -1)$, $(1, 1, -5, 3)$, $(3, 2, 8, -7)$.
2. Пусть в некотором базисе скалярное произведение задано билинейной формой f , а линейное преобразование φ – матрицей A . Найти матрицу A^* сопряженного преобразования φ^* в том же базисе:

$$f = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Привести следующую форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа:

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

4. Привести следующую форму к каноническому виду с помощью метода ортогональных преобразований:

$$11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3.$$

5. Найти все значения параметра λ , при которых положительно определена следующая квадратичная форма:

$$5x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2\lambda x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

Цель текущего контроля:

Определение уровня сформированности профессиональных компетенций, знаний и навыков деятельности в области знаний, излагаемых в курсе.

Задачи текущего контроля: провести оценивание

1. уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности;
2. степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и профессионально значимую информацию, сформированности когнитивных умений.
3. приобретенных умений, профессионально значимых для профессиональной деятельности.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучаемых и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением контрольных работ.

В ходе контрольной работы обучающемуся выдается КИМ с практическим перечнем заданий и предлагается решить данные задания. В ходе выполнения заданий можно пользоваться любой литературой, ограничение по времени 90 минут.

Если текущая аттестация проводится в дистанционном формате, то обучающийся должен иметь компьютер и доступ в систему «Электронный университет». Если у обучающегося отсутствует необходимое оборудование или доступ в систему, то он обязан сообщить преподавателю об этом за 2 рабочих дня. На контрольную работу в дистанционном режиме отводится ограничение по времени 120 минут.

Критерии оценки компетенций (результатов обучения) при текущей аттестации (контрольной работе):

– оценка «отлично» выставляется, если не менее чем на четыре пятых всех заданий контрольной работы даны правильные, полные и глубокие ответы, раскрывающие уверенное знание студентом понятий, закономерностей, принципов, фактов, содержащихся в конкретных материалах по теме; высокую сформированность у него аналитико-синтетических операций и их успешное применение при изложении изучаемого материала;

– оценка «хорошо» выставляется, если не менее чем на две трети всех заданий контрольной работы даны правильные, полные и глубокие ответы, раскрывающие достаточное знание студентом понятий, закономерностей, принципов, фактов, содержащихся в конкретных материалах по теме; хорошую сформированность у него аналитико-синтетических операций и в целом их адекватное применение при изложении изучаемого материала;

– оценка «удовлетворительно» выставляется, если правильно выполнено не менее половины всех заданий контрольной работы, при этом допускается недостаточная полнота и глубина ответов, в которых студентом продемонстрирован необходимый минимум знаний понятий, закономерностей, принципов, фактов, содержащихся в конкретных материалах по теме; слабая сформированность у него аналитико-синтетических операций, затруднения в их применении при изложении изучаемого материала;

– оценка «неудовлетворительно» выставляется, если с минимально необходимым уровнем решения выполнено менее половины всех заданий контрольной работы, ответы демонстрируют незнание или поверхностное знание студентов понятий, закономерностей, принципов, фактов, содержащихся в конкретных материалах по теме; несформированность у него аналитико-синтетических операций.

Количественная шкала оценок:

– оценка «отлично» выставляется, если безошибочно выполнено не менее 80% заданий контрольной работы, качество решения которых соответствует критерию оценки «отлично»;

– оценка «хорошо» выставляется, если безошибочно выполнено не менее 66% и не более 79% заданий контрольной работы, качество решения которых соответствует критериям оценки «хорошо»;

– оценка «удовлетворительно» выставляется, если безошибочно выполнено не менее 50% и не более 65% заданий контрольной работы, качество решения которых соответствует критериям оценки «удовлетворительно»;

– оценка «неудовлетворительно» выставляется, если безошибочно выполнено менее 50% заданий контрольной работы, качество решения которых соответствует критериям оценки «неудовлетворительно».

20.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Линейная алгебра» проводится в форме зачета и экзамена.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра. Результаты текущей аттестации обучающегося по решению кафедры могут быть учтены при проведении промежуточной аттестации. При несогласии студента, ему дается

возможность пройти промежуточную аттестацию (без учета его текущих аттестаций) на общих основаниях.

При проведении зачета учитываются результаты контрольной работы. Для получения оценки «зачтено» на зачете у обучающегося должны иметься или оценки «зачтено» по контрольным работам или студент должен решить соответствующие задачи в ходе проведения зачета. Контрольная работа – по 10 баллов за каждую правильно решенную задачу контрольной работы. При получении не менее половины баллов выставляется оценка «зачтено».

Критерии оценивания компетенций	Шкала оценок
«Зачтено» выставляется студенту, который прочно усвоил предусмотренный программный материал; показал глубокие систематизированные знания, владеет приемами рассуждения и сопоставляет материал из разных источников: теорию связывает с практикой, другими темами данного курса, других изучаемых предметов; без ошибок выполнил практическое задание. Обязательным условием выставленной оценки является правильное решение контрольных работ, систематическая активная работа на лекционных и практических занятиях.	«зачтено»
«Не зачтено» Выставляется студенту, который не справился с заданиями билета, в ответах на другие вопросы допустил существенные ошибки. Не может ответить на дополнительные вопросы, предложенные преподавателем.	«Не зачтено»

При проведении экзамена обучающийся должен ответить на соответствующие вопросы в ходе экзамена:

1	Линейные пространства.
2	Линейная зависимость и независимость векторов
3	Базис, координаты, размерность пространства
4	Изоморфизм линейных пространств
5	Матрица перехода от одного базиса к другому, преобразование координат вектора при изменении базиса
6	Подпространства линейного пространства
7	Сумма и пересечение подпространств
8	Прямая сумма подпространств
9	Линейные операторы
10	Матрица линейного оператора
11	Действия с линейными операторами
12	Аннулирующие многочлены
13	Обратный оператор
14	Линейный оператор, действующий из R^n в R^n
15	Ядро и образ линейного оператора. Ранг и дефект оператора
16	Собственные векторы и собственные значения линейного оператора
17	Теорема Гамильтона-Кэли
18	Инвариантные подпространства
19	Жорданова Форма матрицы линейного оператора
20	Евклидово и унитарное пространства. Длина вектора, угол между векторами, ортогональность. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца
21	Ортонормированный базис. Процесс ортогональности
22	Определитель Грама. Ортогональное дополнение. Проекция вектора на подпространство
23	Изоморфизм евклидовых и унитарных пространств
24	Сопряженное пространство. Сопряженный базис
25	Сопряженный оператор, его свойства
26	Самосопряженный оператор, его структура
27	Изометрический оператор, его структура
28	Структура линейных операторов в евклидовых и унитарных пространствах

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие показатели:

- 1) знание теоретических основ;
- 2) умение решать задачи

3) умения применять знания в профессиональной сфере;

4) успешное прохождение текущей аттестации.

Для оценивания результатов экзамена используется **шкала**: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения показаны в следующей таблице:

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Полное соответствие обучающимся всем перечисленным показателям по каждому из вопросов контрольно-измерительного материала. Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), способен иллюстрировать ответ примерами, применять теоретические знания для решения практических задач в области курса, студент умеет работать с различными источниками научной информации, грамотно и правильно представляет свои результаты, правильно отвечает на вопросы КИМ	Повышенный уровень	Отлично
Несоответствие ответа обучающегося одному из перечисленных выше показателей (к одному из вопросов контрольно-измерительного материала) и правильный ответ на дополнительный вопрос в пределах программы. ИЛИ Несоответствие ответа обучающегося любым двум из перечисленных показателей (либо двум к одному вопросу, либо по одному к каждому вопросу контрольно-измерительного материала) и правильные ответы на два дополнительных вопроса в пределах программы.	Базовый уровень	Хорошо
Несоответствие ответа обучающегося любым двум из перечисленных показателей и неправильный ответ на дополнительный вопрос в пределах программы. ИЛИ Несоответствие ответа обучающегося любым трем из перечисленных показателей (в различных комбинациях по отношению к вопросам контрольно-измерительного материала).	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Несоответствие ответа обучающегося любым из перечисленных показателей (в различных комбинациях по отношению к вопросам контрольно-измерительного материала).	–	Неудовлетворительно

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

№1. Линейный оператор $A : R \rightarrow R$ называется обратимым, если существует линейный оператор $B : R \rightarrow R$ такой, что...

а) $AB = BA = I$;

б) $AB = BA = A$.

№2 Если выполнены следующие свойства:

1) $A(\bar{x} + \bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y}, \forall \bar{x}, \bar{y} \in L$;

2) $A(\alpha\bar{x}) = \alpha A\bar{x}, \forall \bar{x} \in L, \alpha \in K$

для оператора $A : L \rightarrow L$, заданного на линейном пространстве L над полем K , то оператор A называется

а) **линейным**;

б) обратным;

в) обратимым.

№3 Если A, B линейные операторы, действующие на линейном пространстве L , то оператор, определяемый равенством $(AB)x = A(Bx), \forall x \in L$, называется

а) **суперпозицией**;

б) суммой.

№4 Пусть $A : L^n \rightarrow L^n$ – линейный оператор. Тогда сумма размерностей ядра и образа оператора A равна

а) **размерности отображаемого пространства L^n** ;

б) наименьшей размерности из размерностей ядра и образа оператора A ;

№5 Линейный оператор $A : L \rightarrow L$ называется невырожденным, если

а) $\text{Ker } A = \{\bar{\theta}\}$;

б) $\text{Ker } A \neq \{\bar{\theta}\}$.

№6 Является ли скалярное произведение (x, y) на R билинейной формой?

да.

№7 Какой вид имеет матрица билинейной формы $A(x, y) = 3x_1y_1 - 8x_2y_2 + x_1y_2$ в базисе $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$?

Ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

№8 Является ли следующая билинейная форма $A(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$ симметрической билинейной формой?

да

№9 Какой вид имеет матрица билинейной формы $A(x, y) = 2x_1y_1 - 6x_2y_2 + 3x_1y_2 + 4x_2y_1$ в базисе $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$?

Ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

№10 Линейный оператор $A : R \rightarrow R$, действующий на евклидовом или унитарном пространстве R называется оператором простой структуры, если существует ортонормированный базис R , в котором матрица оператора A имеет ... вид.

диагональный

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

3) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).

Программа рекомендована НМС математического факультета протокол № 0500-03 от 18.03.2025 г.